有限全序语义和广义皮尔斯律*

刘壮虎

(北京大学外国哲学研究所，北京，100871，liuzh@phil.pku.edu.com)

摘要：将二值逻辑中刻画实质蕴涵的保真性推广有限全序中，用这推广的“保真性”给出蕴涵在有限全序中的语义条件，从而给出了完整的有限全序语义。建立了刻画有限全序的逻辑系统 **FO**，证明 **FO** 的可靠性、完全性和可判定性。提出了广义的皮尔斯律，证明其能区分不同基数的有限全序。给出了 **FO** 的扩充系统 $\mathbf{FO}_n$，证明了 $\mathbf{FO}_n$ 刻画了 n 个元素的全序。

关键词：多值逻辑；有限全序；保真性；真的程度；皮尔斯律

在本体论意义上，命题只有两个值，真和假，但在认知的意义上，命题可能有多个“值”。另外有些命题根本没有本体论的意义，如规范命题、评价命题、选择策略等，但是它们也可以有某种“值”。讨论这类命题的逻辑性质，并不需要直接考虑这些“值”的意义，只需要考虑这些“值”的性质及其它们之间的关系，从而确定命题联结词在这些“值”中的解释就行了。

我们将它们称为一种广义的真值，每个值代表一个不同程度的真。但我们并不像概率逻辑那样，考虑每个值的绝对的真的程度，而是只考虑它们之间的相对关系，称为（真的程度的）强弱关系。

一个命题是逻辑有效的最一般的意义，是在所涉及的任何情况下，都是“真”的。对于广义的真值，这样的刻画逻辑有效的“真”，就是真的程度最强的那个值，在本文中称它为“完全真”。

强弱关系一般是偏序关系，但因为以下两个原因，在本文中只考虑全序的强弱关系。

一、不少情况下，这强弱关系本来就是全序关系。

二、在很多情况下，如必需作出选择时、计算机处理广义真值时等，都是将偏序关系扩充成全序关系的。而偏序理论告诉我们，这样的扩充是可以做到的。

当我们考虑的不是绝对的真的程度，而是相对的强弱关系时，很难给否定一个合理的意义。本文暂时不考虑否定联结词，只考虑→、∧和∨。

虽然从理论上可以考虑一般的全序，但从广义真值的来源看，有限的全序更为重要。

基数相同的有限全序集都是同构的，我们用 $\mathbf{N}_s = \{0, 1, ,\cdots, s\text{-}1\}$作为 s 个元素的有限全序集的代表。注意，我们用 0 表示完全真，强弱关系和<是相反的，a<b 表示 a 强于 b，所以 a≥b 就是 a 不强于 b。

一、有限全序语义

我们使用的形式语言包括：

(1) 命题变项 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n, \cdots\cdots$。用 p, q, r 表示一般的命题变项。

(2) 联结词 →(蕴涵)、∧(合取)和∨(析取)。

公式形成如常，用$\alpha, \beta, \gamma, \psi, \varphi$表示一般的公式。全体公式的集合记为 **Form**。

由$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\}$形成的公式的集合记为 $\mathbf{Form}_n$，在 $\mathbf{Form}_n$ 上也有结构归纳法。任给公式α，存在 n，使得$\alpha \in \mathbf{Form}_n$。

在经典逻辑中，蕴涵式成立与否是用保真性来刻画的，保真性是说：前件真后件也真。用强弱关系（经典的真值的广义真值的特例，在经典真值中，“真”强于“假”）说，就是前件不能强于后

* 本文得到教育部文科基地重大研究项目《20世纪西方逻辑哲学和数学哲学》（项目编号：05JJD720190）的资助。

件。

用“前件不能强于后件”来刻画蕴涵式，可以推广到广义真值中。在广义真值中，“前件不能强于后件”可以称为*真程度的保强性*。

当蕴涵式成立时，蕴涵式取最强的完全真。当蕴涵式不成立时，蕴涵式不能取完全真，但还有其它不同的值可取。我们提出一条*等度原则*来确定蕴涵式不成立时的值：蕴涵式不成立时，蕴涵式和后件有同样的真的程度，即它们取相同的值。

合取式和析取式的取值是平凡的：合取式取值与两个合取支中弱的一个相同，析取式取值与两个析取支中强的一个相同。

定义 1.1 *s 赋值* s≥2。V：$\mathbf{Form}\to\mathbf{N}_s$，V 称为一个 s 赋值，如果它满足以下条件：

(1) 当 $V(\alpha)\geq V(\beta)$时，$V(\alpha\to\beta) = 0$，当 $V(\alpha)<V(\beta)$时，$V(\alpha\to\beta) = V(\beta)$；

(2) $V(\alpha\wedge\beta) = \max(V(\alpha), V(\beta))$；

(3) $V(\alpha\vee\beta) = \min(V(\alpha), V(\beta))$。■

s 赋值统称为赋值。当 s = 2 时，就是经典逻辑的赋值。（0 是真，1 是假）

定理 1.2 *组合原则*

(1) 如果赋值 V 和 V′满足：$V(\mathbf{p_1}) = V'(\mathbf{p_1}),\cdots, V(\mathbf{p_n}) = V'(\mathbf{p_n})$，则任给$\varphi\in\mathbf{Form}_n$，都有 $V(\varphi) = V'(\varphi)$。

(2) 给定命题变项到 $\mathbf{N}_s$ 的映射 f，f 可以唯一扩充为 s 赋值。

证：

(1) 使用 $\mathbf{Form}_n$ 上的结构归纳法和赋值定义的三个条件。

(2) 使用结构归纳定义从映射 f 定义出 s 赋值 V。再用(1)证明这样的赋值是唯一的。■

由定理 1.2(2)，只要对每个命题变项 p 定义了 $V(p)$，就定义了一个赋值。

定义 1.3 *s 有效* 如果任给 s 赋值 V，都有 $V(\varphi) = 0$，则称φ是 s 有效的，记为 $\models_s \varphi$。■

α不是 s 有效的记为 $\not\models_s \varphi$。$\not\models_s \varphi$的条件是：存在 s 赋值 V，使得 $V(\varphi) \neq 0$。

因为当 t≤s 时 t 赋值也是 s 赋值，所以当 t≤s 时，φ是 s 有效能得到φ是 t 有效。特别地，任给 s≥2，φ是 s 有效能得到φ是经典逻辑有效的，即φ是重言式。

定义 1.4 *有效* 如果任给 s≥2，φ都是 s 有效，则称φ是有效的，记为 $\models \varphi$。■

φ不是有效的记为 $\not\models\varphi$。$\not\models\varphi$的条件是：存在 s≥2，存在 s 赋值 V，使得 $V(\varphi) \neq 0$。

以上建立的语义称为*有限全序语义*，是一种特殊的多值语义。

引理 1.5 $\varphi\in\mathbf{Form}_n$。如果$\varphi$不是有效的，则$\varphi$不是 n+1 有效的。

证：如果φ不是有效的，则存在赋值 V′，使得 $V'(\varphi) \neq 0$。因为

$$\{0\}\cup\{V'(\mathbf{p_1}),\cdots, V'(\mathbf{p_n})\}$$

是至多 n+1 个元素的全序集，所以存在 s≤n+1，使得

$$\{0\}\cup\{V'(\mathbf{p_1}),\cdots, V'(\mathbf{p_n})\}$$

同构于 $\mathbf{N}_s$（参见[2]p151）。取同构映射 f，则有 a≥b 当且仅当 $f(a)\geq f(b)$。

同构 f 保持最大元和最小元不变，即

$$\max(f(a), f(b)) = f(\max(a, b)),\quad \min(f(a), f(b)) = f(\min(a, b))。$$

特别地有 $f(0) = 0$。

定义 s 赋值 V 如下：

$$V(\mathbf{p_1}) = f(V'(\mathbf{p_1})),\cdots, V(\mathbf{p_n}) = f(V'(\mathbf{p_n})),$$

对于其它命题变项 p，$V(p) = 0$。

归纳证明：任给$\alpha\in\mathbf{Form}_n$，都有 $V(\alpha) = f(V'(\alpha))$。

(1) α是 $\mathbf{p_i}$（1≤i≤n），则由 V 的定义直接可得。

(2) $\alpha = \beta\to\gamma$，则$\beta, \gamma\in\mathbf{Form}_n$，由归纳假设，有 $V(\beta) = f(V'(\beta))$和 $V(\gamma) = f(V'(\gamma))$。

如果 $V'(\alpha) = 0$，则 $V'(\beta\to\gamma) = 0$，所以 $V'(\beta)\geq V'(\gamma)$，由 f 是同构映射得

$f(V'(\beta)) \geq f(V'(\gamma))$，

由归纳假设得 $V(\beta) \geq V(\gamma)$，所以

$V(\beta \to \gamma) = 0$，

因此 $V(\alpha) = V(\beta \to \gamma) = 0 = f(0) = f(V'(\beta \to \gamma)) = f(V'(\alpha))$。

如果 $V'(\alpha) \neq 0$，则 $V'(\beta \to \gamma) \neq 0$，所以

$V'(\beta) < V'(\gamma)$且 $V'(\beta \to \gamma) = V'(\gamma)$，

由 f 是同构映射得 $f(V'(\beta)) < f(V'(\gamma))$，由归纳假设得 $V(\beta) < V(\gamma)$，所以

$V(\beta \to \gamma) = V(\gamma)$，

因此 $V(\alpha) = V(\beta \to \gamma) = V(\gamma) = f(V'(\gamma)) = f(V'(\beta \to \gamma)) = f(V'(\alpha))$。

(3) $\alpha = \beta \wedge \gamma$，则$\beta, \gamma \in \mathbf{Form}_n$，由归纳假设，有 $V(\beta) = f(V'(\beta))$和 $V(\gamma) = f(V'(\gamma))$。

所以，$V(\alpha) = V(\beta \wedge \gamma) = \max(V(\beta), V(\gamma)) = \max(f(V'(\beta)), f(V'(\gamma)))$

$= f(\max(V'(\beta), V'(\gamma))) = f(V'(\beta \wedge \gamma)) = f(V'(\alpha))$。

(4) $\alpha = \beta \vee \gamma$，则$\beta, \gamma \in \mathbf{Form}_n$，由归纳假设，有 $V(\beta) = f(V'(\beta))$和 $V(\gamma) = f(V'(\gamma))$。

所以，$V(\alpha) = V(\beta \vee \gamma) = \min(V(\beta), V(\gamma)) = \min(f(V'(\beta)), f(V'(\gamma)))$

$= f(\min(V'(\beta), V'(\gamma))) = f(V'(\beta \vee \gamma)) = f(V'(\alpha))$。

因为$\varphi \in \mathbf{Form}_n$，所以 $V(\varphi) = f(V'(\varphi)) \neq 0$，因此$\varphi$不是 s 有效的，因为 $s \leq n+1$，所以φ也不是 n+1 有效的。■

由引理 1.5 可得：

定理 1.6　有界性定理　任给$\varphi \in \mathbf{Form}_n$，$\varphi$是有效的当且仅当$\varphi$是 n+1 有效的。■

任给公式φ，都可以能行地找到 n，使得$\varphi \in \mathbf{Form}_n$（检查$\varphi$中的命题变项就行了），由定理 1.2(2)，只需计算有限个 n+1 个赋值，就能判定φ是否是 n+1 有效的，从而判定φ是否是有效的。

因此有：

定理 1.7　可判定性　有限全序语义的有效性是可判定的。■

二、系统 FO 和可靠性

系统 **FO** 由以下组成：

公理

A1　$\alpha \to (\beta \to \alpha)$；　　**A2**　$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$；

A3　$\alpha \wedge \beta \to \alpha$；　　**A4**　$\alpha \wedge \beta \to \beta$；

A5　$(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta \wedge \gamma))$；　　**A6**　$\alpha \to \alpha \vee \beta$；

A7　$\beta \to \alpha \vee \beta$；　　**A8**　$(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma))$；

A9　$(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)$；　　**A10**　$(\alpha \to \beta) \vee ((\alpha \to \beta) \to \beta)$。

推演规则

MP　从$\{\alpha, \alpha \to \beta\}$得到$\beta$。

公理 **A1**−**A8** 构成了正逻辑系统，系统 **FO** 最有特点的是公理 **A9** 和 **A10**。

A9 是刻画我们的语义中的可比较性，所以称为可比较性公理；**A10** 是刻画有限全序语义中的等度原则，所以称为等度公理。

系统 **FO** 的证明序列、内定理、推演等概念定义如常，所以系统 **FO** 具有推演的基本性质：

定理 2.1　推演的基本性质

(1) 如果$\alpha \in A$，则 $A \vdash \alpha$。

(2) 如果 $A \vdash \alpha$且 $A \subseteq B$，则 $B \vdash \alpha$。

(3) 如果 $A \vdash \alpha_1, \cdots, A \vdash \alpha_n$，$A \cup \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \vdash \alpha$，则 $A \vdash \alpha$。

(4) 如果 $A \vdash \alpha$，则存在 A 的有限子集 B，使得 $B \vdash \alpha$。■

系统 **FO** 还有以下重要的内定理、推演和关于推演的性质：

定理 2.2

(1) $\vdash \alpha\rightarrow\alpha$。

(2) $\{\alpha\rightarrow\beta, \beta\rightarrow\gamma\} \vdash \alpha\rightarrow\gamma$。

(3) $\{\alpha, \alpha\rightarrow\beta\} \vdash \beta$

(4) $\{\alpha\rightarrow\beta\} \vdash \alpha\rightarrow\alpha\wedge\beta$，$\{\alpha\rightarrow\beta\} \vdash \alpha\rightarrow\beta\wedge\alpha$。

(5) $\{\alpha\rightarrow\beta\} \vdash \alpha\vee\beta\rightarrow\beta$，$\{\alpha\rightarrow\beta\} \vdash \beta\vee\alpha\rightarrow\beta$。■

定理 2.3

(1) 演绎定理　如果 $A\cup\{\alpha\} \vdash \beta$，则 $A \vdash \alpha\rightarrow\beta$。

(2) 分情况证明规则　如果 $A\cup\{\alpha\} \vdash \varphi$ 且 $A\cup\{\beta\} \vdash \varphi$，则 $A\cup\{\alpha\vee\beta\} \vdash \varphi$。■

它们的证明和经典命题逻辑系统的证明是一样的，详细证明可参考[1]p32-41。

分情况证明规则也可以表示为：如果 $A\cup\{\alpha\vee\beta\} \nvdash \varphi$，则 $A\cup\{\alpha\} \nvdash \varphi$ 且 $A\cup\{\beta\} \nvdash \varphi$。

系统 **FO** 对于有限全序语义是可靠的。

引理 2.4　系统 **FO** 的公理是有效的。

证：公理(1)−(8)的证明略，可参考[1]p186, 190。

公理(9)，$(\alpha\rightarrow\beta)\vee(\beta\rightarrow\alpha)$。任给 s 赋值 V，由 $\mathbf{N}_s$ 的可比较性得

$$V(\alpha)\geq V(\beta) \text{或} V(\beta)\geq V(\alpha),$$

所以

$$V(\alpha\rightarrow\beta) = 0 \text{ 或 } V(\beta\rightarrow\alpha) = 0。$$

因此 $V((\alpha\rightarrow\beta)\vee(\beta\rightarrow\alpha)) = \min(V(\alpha\rightarrow\beta), V(\beta\rightarrow\alpha)) = 0$。

公理(10)，$(\alpha\rightarrow\beta)\vee((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\beta)$。任给 s 赋值 V，由 $\mathbf{N}_s$ 的可比较性得

$$V(\alpha)\geq V(\beta) \text{或} V(\alpha)<V(\beta)。$$

当 $V(\alpha)\geq V(\beta)$ 时有 $V(\alpha\rightarrow\beta) = 0$，当 $V(\alpha)<V(\beta)$ 时有 $V(\alpha\rightarrow\beta) = V(\beta)$，所以 $V((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\beta) = 0$。

因此 $V((\alpha\rightarrow\beta)\vee((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\beta)) = \min(V(\alpha\rightarrow\beta), V((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\beta)) = 0$。■

引理 2.5　系统 **FO** 的推演规则保持有效性。

证：设 α 和 $\alpha\rightarrow\beta$ 都是有效的，证明 β 是有效的。

任给 s 赋值 V，由 α 和 $\alpha\rightarrow\beta$ 的有效性得

$$V(\alpha) = 0 \text{ 和 } V(\alpha\rightarrow\beta) = 0,$$

由 $V(\alpha\rightarrow\beta) = 0$ 得 $V(\alpha)\geq V(\beta)$，所以 $V(\beta)= 0$。■

由引理 2.4 和 2.5 得：

定理 2.6　可靠性定理　如果 $\vdash \varphi$，则 $\models \varphi$。■

三、完全性

定义 3.1　极大集　A 是公式集，A 称为极大集，如果 A 满足

(1) 推演封闭性　如果 $A \vdash \varphi$，则 $\varphi\in A$；

(2) 析取性质　如果 $\alpha\vee\beta\in A$，则 $\alpha\in A$ 或 $\beta\in A$。■

如果 $\vdash \varphi$，则一定有 $A \vdash \varphi$，所以极大集 A 一定包含所有的内定理。特别地，极大集 A 一定包含所有的公理。

引理 3.2　极大集的性质　A 是极大集。

(1) 如果 $\alpha\rightarrow\beta\in A$ 且 $\beta\rightarrow\gamma\in A$，则 $\alpha\rightarrow\gamma\in A$。

(2) $\alpha\rightarrow\beta\in A$ 或 $\beta\rightarrow\alpha\in A$。

(3) 如果$\alpha\in$A，则$\beta\to\alpha\in$A。

(4) 如果$\alpha\to\beta\notin$A，则$(\alpha\to\beta)\to\beta\in$A。

(5) 如果$\alpha\to\beta\in$A，则$\alpha\to\alpha\wedge\beta\in$A，$\alpha\to\beta\wedge\alpha\in$A。

(6) 如果$\alpha\to\beta\in$A，则$\alpha\vee\beta\to\beta\in$A，$\beta\vee\alpha\to\beta\in$A。

证：由公理、定理 2.2 和极大集的性质。■

引理 3. 3 A 是极大集。

(1) 定义 Form 上的关系 R_A 如下：$\alpha R_A\beta$ 当且仅当 $\alpha\to\beta\in$A，则 R_A 有自返性、传递性和可比较性。

(2) 定义 Form 上的关系～如下：$\alpha\sim\beta$ 当且仅当 $\alpha R_A\beta$且$\beta R_A\alpha$，则～是 Form 上的等价关系。公式α的等价类记为$|\,\alpha\,|$。

(3) 存在 Form / ～(Form 对于～的商集)上的全序关系$\geq_A$，使得

$|\,\alpha\,|\geq_A|\,\beta\,|$ 当且仅当 $\alpha R_A\beta$，

因此$|\,\alpha\,|\geq_A|\,\beta\,|$ 当且仅当 $\alpha\to\beta\in$A。

证：(1) 自返性。任给$\alpha\in$Form，都有$\alpha\to\alpha\in$A，所以$\alpha R_A\alpha$。

传递性。任给$\alpha,\beta,\gamma\in$Form，如果$\alpha R_A\beta$且$\beta R_A\gamma$，则$\alpha\to\beta\in$A 且$\beta\to\gamma\in$A，由引理 3.2(1)得

$\alpha\to\gamma\in$A，

因此$\alpha R_A\gamma$。

可比较性。任给$\alpha,\beta\in$Form，由引理 3.2(2)得

$\alpha\to\beta\in$A 或$\beta\to\alpha\in$A，

因此$\alpha R_A\beta$或$\beta R_A\alpha$。

(2)(3) 由偏序集理论。可参见[2]p100-101。■

引理 3. 4 A 是极大集。取由引理 3.3 定义的 Form / ～上的全序关系$\geq_A$。则

$\alpha\in$A 当且仅当 $|\,\alpha\,|$是 Form / ～上的最小元。

证：

(1) 证明：如果$\alpha\in$A，则$|\,\alpha\,|$是 Form / ～上的最小元。

任给$|\,\beta\,|\in$ Form / ～，由$\alpha\in$A 和引理 3.2(3)得$\beta\to\alpha\in$A，所以$|\,\beta\,|\geq_A|\,\alpha\,|$。

(2) 证明：如果$|\,\alpha\,|$是 Form / ～上的最小元，则$\alpha\in$A。

取$\beta\in$A，则$|\,\beta\,|\geq_A|\,\alpha\,|$，所以$\beta\to\alpha\in$A，由$\beta\in$A 和$\beta\to\alpha\in$A 得$\alpha\in$A。■

记这个最小元为 0_A，则$\alpha\in$A 当且仅当 $|\,\alpha\,| = 0_A$。

引理 3.5 A 是极大集。任给 n，存在 s≤n+1，存在 s 赋值 V，使得任给$\varphi\in\mathbf{Form}_n$，都有

$V(\varphi) = 0$ 当且仅当 $\varphi\in$A。

证：取引理 3.3 定义的 Form / ～上的全序关系$\geq_A$，则 Form / ～的子集

$\{0_A\}\cup\{|\,\mathbf{p_1}\,|,\cdots,|\,\mathbf{p_n}\,|\}$

是至多 n+1 个元素的全序集，所以存在 s≤n+1，使得

$\{0_A\}\cup\{|\,\mathbf{p_1}\,|,\cdots,|\,\mathbf{p_n}\,|\}$

同构于 $\mathbf{N}_s$（参见[2]p151），取同构映射 f，则

$|\,\alpha\,|\geq_A|\,\beta\,|$ 当且仅当 $f(|\,\alpha\,|)\geq f(|\,\beta\,|)$。

因为同构保持最小元不变，所以 $f(0_A) = 0$。

定义 s 赋值 V 如下：

$V(\mathbf{p_1}) = f(|\,\mathbf{p_1}\,|),\cdots, V(\mathbf{p_n}) = f(|\,\mathbf{p_n}|)$，对于其它命题变项 p，$V(p) = 0$。

归纳证明：任给$\alpha\in\mathbf{Form}_n$，都有 $V(\alpha) = f(|\,\alpha\,|)$。

(1) α是 $\mathbf{p_i}$（1≤i≤n），则由 V 的定义直接可得。

(2) $\alpha = \beta\to\gamma$，则$\beta,\gamma\in\mathbf{Form}_n$，由归纳假设，有 $V(\beta) = f(|\,\beta\,|)$和 $V(\gamma) = f(|\,\gamma\,|)$。

如果 $V(\alpha) = 0$，则 $V(\beta\to\gamma) = 0$，由$\to$的语义定义得

$V(\beta)\geq V(\gamma)$，

由归纳假设得 $f(|\,\beta\,|)\geq f(|\,\gamma\,|)$，由 f 是同构映射得$|\,\beta\,|\geq_A|\,\gamma\,|$，由引理 3.3 得$\beta\to\gamma\in$A，由引理 3.4 得

$|\beta\to\gamma| = 0_A$，

因此 $V(\alpha) = V(\beta\to\gamma) = 0 = f(0_A) = f(|\beta\to\gamma|) = f(|\alpha|)$。

如果 $V(\alpha) \neq 0$，则 $V(\beta\to\gamma) \neq 0$，由→的语义定义得

$V(\beta)<V(\gamma)$且 $V(\beta\to\gamma) = V(\gamma)$

由归纳假设得 $f(|\beta|)<f(|\gamma|)$，由 f 是同构映射得$|\beta|<|\gamma|$，由引理 3.3 得

$\beta\to\gamma\notin A$，

由引理 3.2(4)得$(\beta\to\gamma)\to\gamma\in A$，所以$|\beta\to\gamma|\geq_A|\gamma|$，又因为$\gamma\to(\beta\to\gamma)\in A$，所以$|\gamma|\geq_A|\beta\to\gamma|$，因此

$|\gamma| = |\beta\to\gamma|$，

最后得 $V(\alpha) = V(\beta\to\gamma) = V(\gamma) = f(|\gamma|) = f(|\beta\to\gamma) = f(|\alpha|)$。

(3) $\alpha = \beta\wedge\gamma$，则$\beta, \gamma\in\mathbf{Form}_n$，由归纳假设，有 $V(\beta) = f(|\beta|)$和 $V(\gamma) = f(|\gamma|)$。

如果 $V(\beta)\geq V(\gamma)$，则 $V(\beta\wedge\gamma) = \max(V(\beta), V(\gamma)) = V(\beta)$，由 $V(\beta)\geq V(\gamma)$和归纳假设得

$f(|\beta|)\geq f(|\gamma|)$，

由 f 是同构映射得$|\beta|\geq_A|\gamma|$，由引理 3.3 得

$\beta\to\gamma\in A$，

由引理 3.2(4)得$\beta\to\beta\wedge\gamma\in A$，由引理 3.3 得

$|\beta|\geq_A|\beta\wedge\gamma|$，

又因为$\beta\wedge\gamma\to\beta\in A$，所以

$|\beta\wedge\gamma|\geq_A|\beta|$，

因此$|\beta\wedge\gamma| = |\beta|$，最后得 $V(\beta\wedge\gamma) = V(\beta) = |\beta| = |\beta\wedge\gamma|$。

如果 $V(\gamma)\geq V(\beta)$，则同理可证 $V(\beta\wedge\gamma) = V(\gamma) = |\gamma| = |\beta\wedge\gamma|$。

(4) $\alpha = \beta\vee\gamma$，则$\beta, \gamma\in\mathbf{Form}_n$，由归纳假设，有 $V(\beta) = f(|\beta|)$和 $V(\gamma) = f(|\gamma|)$。

如果 $V(\beta)\geq V(\gamma)$，则 $V(\beta\vee\gamma) = \min(V(\beta), V(\gamma)) = V(\gamma)$，由 $V(\beta)\geq V(\gamma)$和归纳假设得

$f(|\beta|)\geq f(|\gamma|)$，

由 f 是同构映射得$|\beta|\geq_A|\gamma|$，由引理 3.3 得

$\beta\to\gamma\in A$，

由引理 3.2(5)得 $\gamma\to\beta\vee\gamma\in A$，所以

$|\gamma|\geq_A|\beta\vee\gamma|$，

又因为$\beta\vee\gamma\to\gamma\in A$，所以

$|\beta\vee\gamma|\geq_A|\gamma|$，

因此$|\beta\vee\gamma| = |\gamma|$，最后得 $V(\beta\vee\gamma) = V(\gamma) = |\gamma| = |\beta\vee\gamma|$。

如果 $V(\gamma)\geq V(\beta)$，则同理可证 $V(\beta\vee\gamma) = V(\beta) = |\beta| = |\beta\vee\gamma|$。

因为$\varphi\in\mathbf{Form}_n$，所以 $V(\varphi) = 0$ 当且仅当 $f(|\varphi|) = 0$ 当且仅当 $|\varphi| = 0_A$ 当且仅当 $\varphi\in A$。■

引理 3. 6 如果 $\nvdash\varphi$，则存在极大集 A，使得$\varphi\notin A$。

证：给出全体公式的一个枚举：$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \cdots\cdots$，归纳定义 A_n 如下：

$A_0 = \varnothing$，

$$A_{n+1} = \begin{cases} A_n & \text{若 } A_n\cup\{\varphi_n\}\vdash\varphi\text{；} & ① \\ A_n\cup\{\varphi_n\} & \text{若 } A_n\cup\{\varphi_n\}\nvdash\varphi\text{，}\varphi_n\text{ 不是析取式；} & ② \\ A_n\cup\{\varphi_n, \alpha\} & \text{若 } A_n\cup\{\varphi_n\}\nvdash\varphi\text{，}\varphi_n = \alpha\vee\beta\text{，}A_n\cup\{\varphi_n, \alpha\}\nvdash\varphi\text{；} & ③ \\ A_n\cup\{\varphi_n, \beta\} & \text{若 } A_n\cup\{\varphi_n\}\nvdash\varphi\text{，}\varphi_n = \alpha\vee\beta\text{，}A_n\cup\{\varphi_n, \alpha\}\vdash\varphi\text{。} & ④ \end{cases}$$

再令 $A = \cup\{A_n \mid n\in\mathbf{N}\}$。

(1) 归纳证明：任给 k，都有 $A_k\nvdash\varphi$。

k = 0。$A_0\nvdash\varphi$就是$\nvdash\varphi$，成立。

k = n+1。由归纳假设，$A_n\nvdash\varphi$。

情况①，$A_{n+1} = A_n$，所以 $A_{n+1}\nvdash\varphi$。

情况②③，由条件直接得 $A_{n+1}\nvdash\varphi$。

情况④，由 $A_n\cup\{\varphi_n\}\nvdash\varphi$得

$A_n\cup\{\varphi_n\}\cup\{\alpha\vee\beta\}\nvdash\varphi$，

又 $A_n \cup \{\varphi_n\} \cup \{\alpha\} \vdash \varphi$，由分情况证明规则，得

$$A_n \cup \{\varphi_n\} \cup \{\beta\} \nvdash \varphi,$$

所以 $A_{n+1} \nvdash \varphi$。

(2) 证明：$A \nvdash \varphi$，所以$\varphi \notin A$。

反证法。如果 $A \vdash \varphi$，则存在 A 的有限子集 B，使得 $B \vdash \varphi$。显然$\{A_n \mid n \in \mathbf{N}\}$是单调的，由集合论理论，存在 n，使得 $B \subseteq A_n$（参见[2]p32, 317），所以 $A_n \vdash \varphi$，与(1)矛盾。

(3) 证明 A 是极大集。

证 A 是推演封闭的。如果 $A \vdash \alpha$，设$\alpha = \varphi_n$，则由 $A \vdash \varphi_n$ 和 $A \nvdash \varphi$得

$$A \cup \{\varphi_n\} \nvdash \varphi,$$

所以

$$A_n \cup \{\varphi_n\} \nvdash \varphi,$$

由 A_{n+1} 的定义得$\varphi_n \in A_{n+1}$，所以$\varphi_n \in A$，即$\alpha \in A$。

证 A 有析取性质。如果$\alpha \vee \beta \in A$，设$\alpha \vee \beta = \varphi_n$，则由 A_{n+1} 的定义得

$\alpha \in A_{n+1}$(情况③) 或 $\beta \in A_{n+1}$(情况④)，

所以$\alpha \in A$ 或$\beta \in A$。■

有了这些准备，就可以证明 **FO** 的完全性了。

定理 3.7 完全性定理 如果 $\models \varphi$，则 $\vdash \varphi$。

证：我们证明：任给$\varphi \in \mathbf{Form}_n$，如果 $\nvdash \varphi$，则 $\not\models \varphi$。

如果 $\nvdash \varphi$，由引理 3.6 存在极大集 A，使得$\varphi \notin A$。对于这个极大集 A，取引理 3.5 中的 n+1 赋值 V，则 $V(\varphi) = 0$ 当且仅当 $\varphi \in A$。由$\varphi \notin A$ 得 $V(\varphi) \neq 0$，所以$\not\models \varphi$。■

四、广义皮尔斯律

从有限全序语义看，皮尔斯律$((\mathbf{p_1} \to \mathbf{p_2}) \to \mathbf{p_1}) \to \mathbf{p_1}$ 是 2 有效的（重言式）但不是 3 有效的。我们将给出类似的公式，使它是 m 有效的但不是 m+1 有效的。

定义 4. 1 皮尔斯律

(1) α, β是公式，$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$称为由$\alpha$和$\beta$生成的皮尔斯律，记为$\theta(\alpha, \beta)$。

(2) $m \geq 2$，归纳定义由$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 生成的 m 阶皮尔斯律$\theta^m(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$如下：

$\theta^2(\alpha_1, \alpha_2) = \theta(\alpha_1, \alpha_2)$。

$\theta^{m+1}(\alpha_1, \cdots, \alpha_{m+1}) = \theta(\theta^m(\alpha_1, \cdots, \alpha_m), \theta^m(\alpha_2, \cdots, \alpha_{m+1}))$。■

引理 4. 2 V 是赋值

(1) $s \geq 2$。如果 $V(\alpha), V(\beta) \in \mathbf{N}_s$，则 $V(\theta(\alpha, \beta)) \in \mathbf{N}_{s-1}$。

(2) $m \geq 2$，$m \leq s$。如果 $V(\alpha_1), \cdots, V(\alpha_m) \in \mathbf{N}_s$，则 $V(\theta^m(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)) \in \mathbf{N}_{s+1-m}$。

证：(1) 用反证法证明 $V(\theta(\alpha, \beta)) \neq s-1$。

如果 $V(\theta(\alpha, \beta)) = s-1$，则 $V(\theta(\alpha, \beta)) \neq 0$，所以 $V(\alpha) = V(\theta(\alpha, \beta)) = s-1$，因此

$$V(\alpha) \geq V(\beta)。$$

由 $V(\alpha) \geq V(\beta)$得 $V(\alpha \to \beta) = 0$，由 $V(\alpha \to \beta) = 0$ 和 $V(\alpha) \neq 0$ 得

$$V((\alpha \to \beta) \to \alpha) = V(\alpha) = s-1,$$

所以 $V(((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha) = 0$，因此 $V(\theta(\alpha, \beta)) = 0$，和 $V(\theta(\alpha, \beta)) = s-1$ 矛盾。

(2) 对 k 归纳证明。

$k = 2$。$V(\alpha_1), V(\alpha_2) \in \mathbf{N}_s$，则由(1)得 $V(\theta(\alpha_1, \alpha_2)) \in \mathbf{N}_{s-1}$，即 $V(\theta^2(\alpha_1, \alpha_2)) \in \mathbf{N}_{s+1-k}$。

$k = m+1$。如果 $V(\alpha_1), \cdots, V(\alpha_{m+1}) \in \mathbf{N}_s$，则

$$V(\alpha_1), \cdots, V(\alpha_m) \in \mathbf{N}_s \text{ 且 } V(\alpha_2), \cdots, V(\alpha_{m+1}) \in \mathbf{N}_s,$$

由归纳假设得

$$V(\theta^m(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)) \in \mathbf{N}_{s+1-m} \text{ 且 } V(\theta^m(\alpha_2, \cdots, \alpha_{m+1})) \in \mathbf{N}_{s+1-m}。$$

由(1)得$\theta^{m+1}(\alpha_1, \cdots, \alpha_{m+1}) = \theta(\theta^m(\alpha_1, \cdots, \alpha_m), \theta^m(\alpha_2, \cdots, \alpha_{m+1})) \in \mathbf{N}_{(s+1-m)-1} = \mathbf{N}_{s+1-(m+1)}$。■

定理 4. 3 m≥2。任给公式$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，$\theta^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$都是 m 有效的。

证：任给 m 赋值 V，都有 $V(\alpha_1),\cdots,V(\alpha_m)\in\mathbf{N}_m$，由引理 4.2 得

$$V(\theta^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m))\in\mathbf{N}_{m+1-m} = \mathbf{N}_1 = \{0\},$$

所以

$$V(\theta^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)) = 0,$$

因此$\theta^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$。■

引理 4. 4 V 是赋值

(1) 如果 $0<V(\alpha)<V(\beta)$，则 $V(\theta(\alpha,\beta)) = V(\alpha)$。

(2) m≥2。如果 $0<V(\alpha_1)<\cdots<V(\alpha_m)$，则 $V(\theta^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)) = V(\alpha_1)$。

证：(1) 如果 $0<V(\alpha)<V(\beta)$，则由 $V(\alpha)<V(\beta)$得

$$V(\alpha\to\beta) = V(\beta),$$

由 $V(\alpha)<V(\alpha\to\beta)$得

$$V((\alpha\to\beta)\to\alpha) = 0,$$

由 $V((\alpha\to\beta)\to\alpha)<V(\alpha)$得 $V(((\alpha\to\beta)\to\alpha)\to\alpha) = V(\alpha)$，即 $V(\theta(\alpha,\beta)) = V(\alpha)$。

(2) 对 k 归纳证明。

k = 2。$0<V(\alpha_1)<V(\alpha_2)$，则由(1)得 $V(\theta(\alpha_1,\alpha_2)) = V(\alpha_1)$。

k = m+1。如果 $0<V(\alpha_1)<\cdots<V(\alpha_{m+1})$，则

$$0<V(\alpha_1)<\cdots<V(\alpha_{m+1})\text{且 }0<V(\alpha_1)<\cdots<V(\alpha_{m+1}),$$

由归纳假设得

$$V(\theta^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)) = V(\alpha_1)\text{且 }V(\theta^m(\alpha_2,\cdots,\alpha_{m+1})) = V(\alpha_2),$$

所以

$$0<V(\theta^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m))<V(\theta^m(\alpha_2,\cdots,\alpha_{m+1})),$$

由(1)得$\theta^{m+1}(\alpha_1,\cdots,\alpha_{m+1}) = \theta(\theta^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m),\theta^m(\alpha_2,\cdots,\alpha_{m+1})) = V(\theta^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)) = V(\alpha_1)$。■

定理 4. 5 m≥2，$\theta^m(\mathbf{p_1},\cdots,\mathbf{p_m})$不是 m+1 有效的。

证：取 m+1 赋值 V，使得 $V(\mathbf{p_1}) = 1,\cdots,V(\mathbf{p_m}) = m$，则 $0<V(\mathbf{p_1})<\cdots<V(\mathbf{p_m})$，由引理 4.4 得

$$\theta^m(\mathbf{p_1},\cdots,\mathbf{p_m}) = V(\mathbf{p_1}) = 1。$$

因此$\theta^m(\mathbf{p_1},\cdots,\mathbf{p_m})$不是 m+1 有效的。■

由定理 4.3 和定理 4.5，$\theta^m(\mathbf{p_1},\cdots,\mathbf{p_m})$就是 m 有效的但不是 m+1 有效的公式。

因此，如果 $s\neq t$，则 s 有效和 t 有效是不一样的。更进一步有，有效和任何一个 s 有效是不一样的。

m≥2。**FO** 加上 m 阶皮尔斯律$\theta^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$（作为公理模式，记为 $\mathbf{A11_m}$）得到的系统记为 $\mathbf{FO_m}$。$\mathbf{FO_m}$中的推演 $A\vdash\varphi$记为 $A\vdash_m\varphi$。

$\mathbf{FO_m}$对于 m 有效是可靠和完全的。

定理 4.6 可靠性定理 如果 $\vdash_m\varphi$，则 $\models_m\varphi$。

证：由引理 2.4，公理 **A1-A10** 都是有效的，所以也是 m 有效的，由定理 4.3，公理 $\mathbf{A11_m}$是 m 有效的。

MP 保持 m 有效性不变的证明类似于引理 2.5，只要在证明中将有效性改为 m 有效性就可以了。■

引理 4.7 A 是 $\mathbf{FO_m}$的极大集。仿引理 3.3 定义 Form / ∼上的全序关系$\geq_A$，则 Form / ∼的子集

$$\{0_A\}\cup\{|\mathbf{p_1}|,\cdots,|\mathbf{p_k}|,\cdots\cdots\}$$

至多只有 m 个元素。

证：反证法。

假设$\{0_A\}\cup\{|\mathbf{p_1}|,\cdots,|\mathbf{p_k}|,\cdots\cdots\}$有多于 m 个元素，则存在 n，使得

$\{0_A\}\cup\{|\mathbf{p_1}|,\cdots,|\mathbf{p_n}|\}$

恰好有有 m+1 个元素，所以它同构于 $\mathbf{N}_{m+1}$，取同构映射 f，定义 m+1 赋值 V 如下：

$V(\mathbf{p_1}) = f(|\mathbf{p_1}|),\cdots, V(\mathbf{p_n}) = f(|\mathbf{p_n}|)$，对于其它命题变项 p，$V(p) = 0$。

可以证明：任给$\alpha\in\mathbf{Form}_n$，都有 $V(\alpha) = f(|\alpha|)$。具体证明类似引理 3.5。

$\{0_A\}\cup\{|\mathbf{p_1}|,\cdots,|\mathbf{p_n}|\}$恰好有有 m+1 个元素，所以在$\{\mathbf{p_1},\cdots,\mathbf{p_n}\}$中存在公式$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，使得

$0_A<_A|\alpha_1|<_A\cdots<_A|\alpha_m|$，

所以 $0<f(|\alpha_1|)<\cdots<f(|\alpha_m|)$。又因为$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\mathbf{Form}_n$，所以

$0<V(\alpha_1)<\cdots<V(\alpha_m)$，

由引理 4.4 得 $V(\theta^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)) = V(\alpha_1) \neq 0$。

因为$\theta^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in\mathbf{Form}_n$，所以

$V(\theta^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)) = f(|\theta^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)|)$，

因此 $f(|\theta^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)|) \neq 0_A$，由引理 3.4 得

$\theta^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\notin A$，

又因为$\theta^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$是 $\mathbf{FO_m}$ 的公理，所以$\theta^m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in A$。矛盾。■

引理 4.8 A 是 $\mathbf{FO_m}$ 的是极大集。存在 s≤m，存在 s 赋值 V，使得任给公式φ，都有

$V(\varphi) = 0$ 当且仅当 $\varphi\in A$。

证：仿引理 3.3，定义 Form / ∼上的全序关系$\geq_A$，由引理 4.7，存在 s≤m，使得

$\{0_A\}\cup\{|\mathbf{p_1}|,\cdots,|\mathbf{p_k}|,\cdots\cdots\}$

同构于 $\mathbf{N}_s$，定义 s 赋值 V 如下：

$V(\mathbf{p_1}) = f(|\mathbf{p_1}|),\cdots, V(\mathbf{p_k}) = f(|\mathbf{p_k}|),\cdots\cdots$。

可以证明：任给公式α，都有 $V(\alpha) = f(|\alpha|)$。具体证明类似引理 3.5。

所以任给公式φ，都有 $V(\varphi) = 0$ 当且仅当 $f(|\varphi|) = 0$ 当且仅当 $|\varphi| = 0_A$ 当且仅当 $\varphi\in A$。■

定理 4.9 完全性定理 如果 $\models_m\varphi$，则 $\vdash_m\varphi$。

证：类似于定理 3.7 的证明，用引理 4.8 中的 s 赋值 V 替代引理 3.5 中的 s 赋值 V。因为引理 4.8 中的 s≤m，所以这 s 赋值也是 m 赋值。■

参 考 文 献

[1] 刘壮虎：《逻辑演算》，中国社会科学出版社，1992 年。
[2] 刘壮虎：《素朴集合论》，北京大学出版社，2001 年。
[3] 张清宇、郭世铭、李小五：《哲学逻辑研究》第五章，社会科学文献出版社，1997 年。

==

作者简介：

刘壮虎(1954-)，男，上海人，北京大学教授，博士生导师，逻辑教研室主任。北京书生科技有限公司书生研究中心客座研究员。主要研究方向：符号逻辑。

联系方式：
通讯：北京大学哲学系，100871
Email：liuzh@phil.pku.edu.com
电话：62885379（H），62751670（O）
手机：13671124979